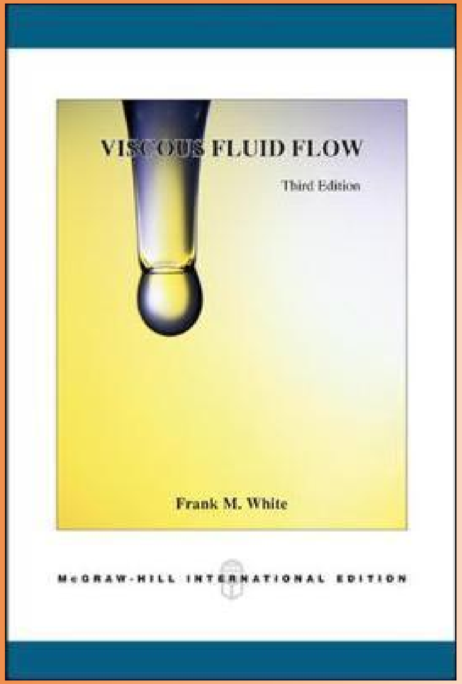


مکانیک سیالات پیشرفته

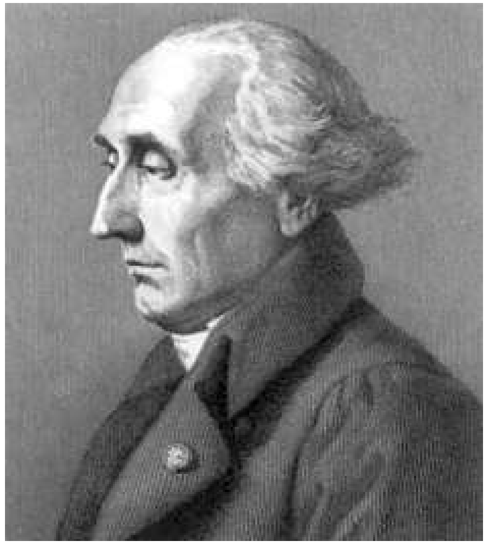
دانشگاه صنعتی شاهرود
دانشکده مهندسی مکانیک

بخش اول از مباحث فصل دوم:
معادلات بقا در مکانیک سیالات

کلاس درس دکتر نوروزی
فروردین ۱۴۰۰

دیدگاه لاگرانژی:

دیدگاه لاگرانژی، رویکردی در مکانیک است که معطوف به اجسام مادی جهت تحلیل دینامیک حرکت آنها است. در این رویکرد با استفاده از یک یا چند دستگاه مختصات، تعقیب اجسام (ذرات) مادی در گذر زمان انجام می شود و به این ترتیب امکان تعیین موقعیت (مسیر) و در نهایت سایر پارامترهای مربوط به حرکت ذرات نظیر، سرعت، شتاب و ... وجود خواهد داشت. دیدگاه لاگرانژی بیشتر در مکانیک جامدات متداول است.

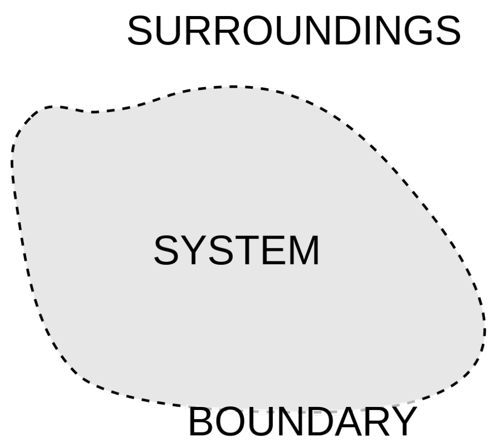


Joseph Luis Lagrange
(1736–1813)

دیدگاه اویلری:

دیدگاه اویلری رویکرد دیگری در مکانیک است که معطوف به فضا جهت تحلیل دینامیک حرکت ذرات موجود در موقعیت های مختلف مکانی است. بنابراین در دیدگاه اویلری کلیه کمیت ها نظیر سرعت، فشار، دما و ... میدانی محسوب می شوند (یعنی علاوه بر زمان تابع مکان هم هستند). به بیان ساده تر، در دیدگاه اویلری، در هر نقطه موردنظر در میدان جریان می توان مشخصات جریان مانند سرعت، شتاب و ... را در زمانهای مختلف بدست آورد و به ذرات عبوری و این که از کجا آمده اند و به کجا می روند، توجهی نمی شود. به دلیل آنکه در مکانیک سیالات با تعداد فوق العاده زیادی از ذرات روبرو هستیم، استفاده از دیگاه اویلری در مکانیک سیالات بسیار به صرفه تر و متداول است.

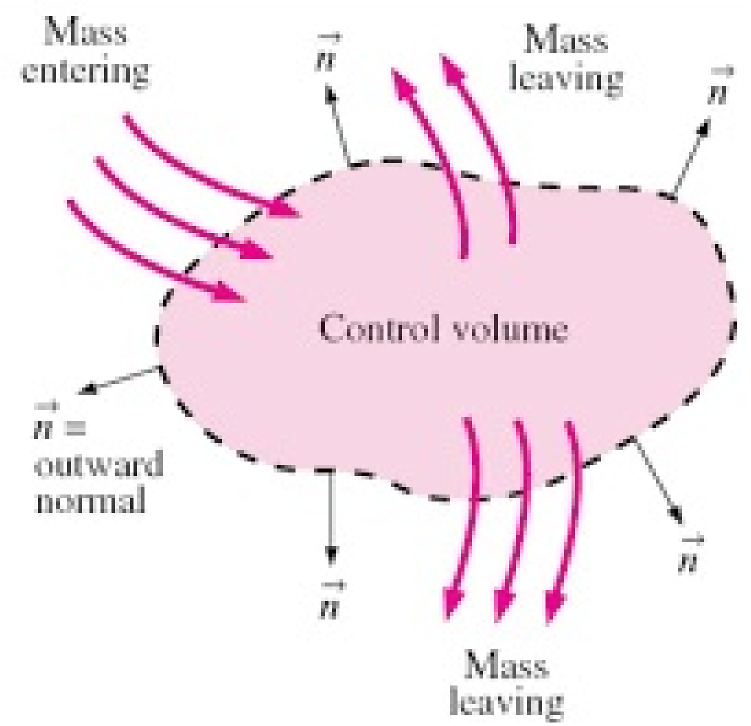
Leonhard Euler
(1707–1783)



سیستم:

مقدار مشخصی از جرم سیستم (**System**) نامیده می شود و هرآنچه بیرون مرز (**Boundary**) آن قرار گرفته، محیط پیرامونی (**Surroundings**) محسوب می شود.

نکته: تمام قوانین فیزیک مکانیک برای سیستم ها نوشته شده اند.



حجم کنترل:

به محدوده مشخصی از فضا حجم کنترل گفته می شود که امکان ورود و خروج جرم به این محدوده وجود دارد. استفاده از حجم کنترل در دیدگاه اویلری رایج است.

نکته: در شکل مقابل، $\vec{n}$ بردار یکه روی سطوح حجم کنترل و به سمت خارج حجم کنترل است.

قوانین مهم در مکانیک سیالات

۱- بقای جرم: مقدار جرم یک سیستم همواره مقداری ثابت است، پس

$$\left.\frac{dm}{dt}\right|_{syst} = 0$$

۲- بقای مومنتوم خطی: برآیند نیروهای $(\mathbf{F})$ وارد بر یک سیستم برابر با نرخ تغییرات اندازه حرکت خطی $(m\mathbf{V})$ آن است:

$$\left.\frac{dm\mathbf{V}}{dt}\right|_{syst} = \sum \mathbf{F}$$

۳- بقای مومنتوم زاویه ای: برآیند گشتاورهای $(\mathbf{M})$ وارد بر یک سیستم برابر با نرخ تغییرات اندازه حرکت زاویه ای $(\mathbf{H} = \sum (\mathbf{r} \times \mathbf{V})\delta m)$ آن است:

$$\left.\frac{d\mathbf{H}}{dt}\right|_{syst} = \sum \mathbf{M}$$

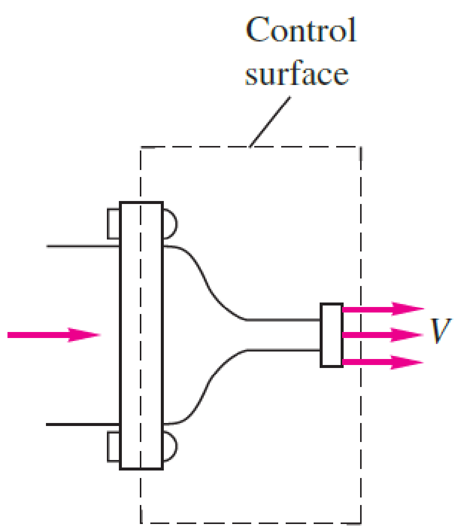
۴- بقای انرژی: حرارت داده شده به یک سیستم (Q) و کار انجام شده توسط آن (W)، سبب تغییر انرژی مکانیکی سیستم (E) می شود:

$$\delta Q - \delta W = dE \quad or \quad \dot{Q} - \dot{W} = \left.\frac{dE}{dt}\right|_{syst}$$

۵- قانون دوم ترمودینامیک:

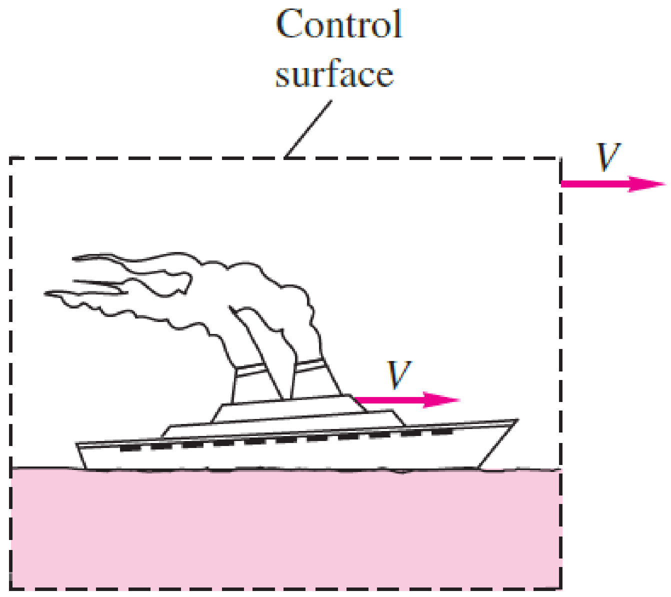
$$dS \geq \frac{\delta Q}{T} \quad or \quad \left.\frac{dS}{dt}\right|_{syst} = \frac{\dot{Q}}{T} + \dot{S}_{gen}$$

قضیه انتقال رینولدز:



در مسائل مکانیک سیالات، قضیه انتقال رینولدز کمک می کند تا قوانین مکانیک بجای سیستم بر حسب حجم کنترل بیان شوند. مطابق این قضیه داریم:

$$\boxed{\frac{d}{dt}(B_{\text{syst}}) = \frac{d}{dt}\left(\int_{\text{CV}} \beta\rho\, d\mathcal{V}\right) + \int_{\text{CS}} \beta\rho(\mathbf{V}_r \cdot \mathbf{n})\, dA} \quad (۱)$$



در رابطه فوق، B یک کمیت فیزیکی است که می تواند جرم، مومنتوم خطی، مومنتوم زاویه ای، انرژی و آنتروپی باشد. همچنین ρ چگالی سیال، $\mathbf{V_r}$ سرعت نسبی جریان در سطوح حجم کنترل، CV معرف حجم کنترل و CS معرف سطوح حجم کنترل است. همچنین β محتوای B در واحد جرم است ($\beta = dB/dm$). برای حجم کنترل متحرک، عبارت سرعت نسبی به شکل زیر تعریف می شود:

$$\mathbf{V}_r = \mathbf{V} - \mathbf{V}_s$$

در رابطه فوق $\mathbf{V}$ سرعت جریان در سطوح حجم کنترل و $\mathbf{V}_s$ سرعت حرکت حجم کنترل است. بدیهی است برای حجم کنترل ثابت، ترم سرعت نسبی برابر $\mathbf{V}$ خواهد بود.

یادآوری بسط تیلور

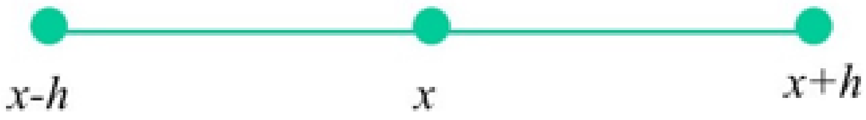
Brook Taylor (1685-1731)

برای توابع پیوسته و مشتق پذیر سری توانی بصورت زیر وجود دارد:

$$f(x+h)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}f^{[n]}(x)h^{n}$$

$$f(x+h)=f(x)+f'(x)h+\frac{1}{2}f''(x)h^{2}+\frac{1}{3!}f'''(x)h^{3}+\dots \qquad (۲)$$

در رابطه فوق، $f^{[n]}$ معرف مشتق n ام تابع f است.



نکته: چنانچه مقدار h کوچک باشد:

$$f(x+h)\approx f(x)+f'(x)h \qquad (۳)$$

۱– صورت دیفرانسیلی قانون بقای جرم

چنانچه در قضیه انتقال رینولدز B را جرم (m) در نظر بگیریم، در اینصورت:

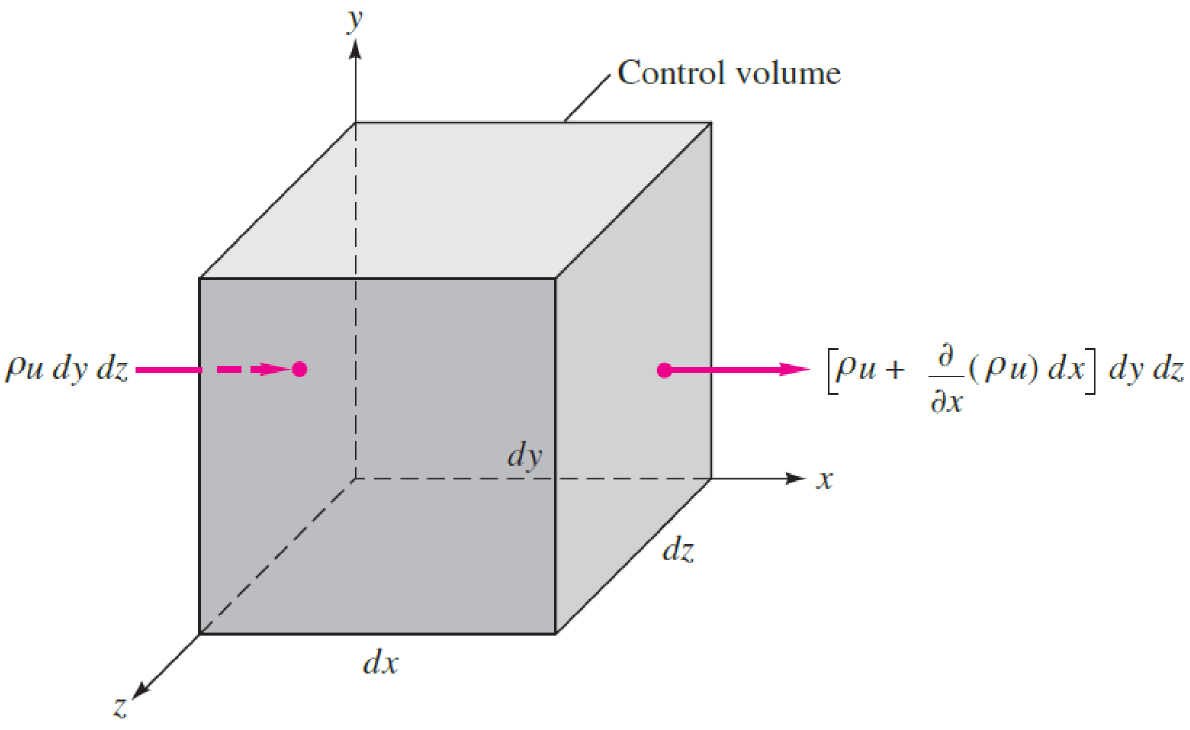
$.\ \beta = dB / dm = dm / dm = 1$

با توجه به قضیه انتقال رینولدز برای جرم داریم:

$$\int_{CV} \frac{\partial \rho}{\partial t} d\mathcal{V} + \sum_i (\rho_i A_i V_i)_{out} - \sum_i (\rho_i A_i V_i)_{in} = 0 \qquad (۴)$$

چنانچه حجم کنترل در ابعاد یک دیفرانسیل حجم باشد، در اینصورت:

$$\int_{CV} \frac{\partial \rho}{\partial t} d\mathcal{V} \approx \frac{\partial \rho}{\partial t} dx\, dy\, dz \qquad (۵)$$



Face	Inlet mass flw	Outlet mass flw
x	$\rho u\ dy\ dz$	$\left[\rho u + \frac{\partial}{\partial x}(\rho u)\ dx\right] dy\ dz$
y	$\rho v\ dx\ dz$	$\left[\rho v + \frac{\partial}{\partial y}(\rho v)\ dy\right] dx\ dz$
z	$\rho w\ dx\ dy$	$\left[\rho w + \frac{\partial}{\partial z}(\rho w)\ dz\right] dx\ dy$

در شکل مقابل، دبی جرمی ورودی و خروجی به یک حجم کنترل در جهت x نشان داده شده است. مطابق شکل، دبی جرمی ورودی $\dot{m}_{in,x} = \rho u dy dz$ و با توجه به رابطه بسط تیلور (۳)، دبی جرمی خروجی نیز برابر $\dot{m}_{out,x} = (\rho u + (\partial \rho u / \partial x) dx) dy dz$ است. بنابراین اختلاف دبی جرمی ورودی و خروجی در جهت x برابر $(\partial \rho u / \partial x) dx dy dz$ است.

با قرار دادن رابطه (۵) و نیز اختلاف دبی جرمی های خروجی و ورودی در رابطه (۴)، داریم:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t}\,dx\,dy\,dz + \frac{\partial}{\partial x}(\rho u)\,dx\,dy\,dz + \frac{\partial}{\partial y}(\rho v)\,dx\,dy\,dz + \frac{\partial}{\partial z}(\rho w)\,dx\,dy\,dz = 0$$

و در نهایت با ساده کردن رابطه فوق داریم:

$$\boxed{\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}(\rho u) + \frac{\partial}{\partial y}(\rho v) + \frac{\partial}{\partial z}(\rho w) = 0} \qquad (۶)$$

رابطه فوق، قانون بقای جرم (معادله پیوستگی) برای **جریانهای تراکم پذیر** (چگالی متغیر) است. رابطه فوق با استفاده از عملگر دیورژانس به شکل ساده تری قابل بیان است.

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{V}) = 0 \qquad (۷)$$

در اعداد ماخ کمتر از ۰/۳، جریان **تراکم ناپذیر** (مقدار چگالی ثابت) بوده و رابطه پیوستگی به شکل ساده تری قابل بیان است:

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0 \qquad \text{یا} \qquad \nabla \cdot \mathbf{V} = 0 \qquad (۸)$$

۲– صورت دیفرانسیلی قانون بقای مومنتوم

چنانچه در قضیه انتقال رینولدز B را مومنتوم خطی (mV) در نظر بگیریم، در اینصورت: $\beta = d(m\mathbf{V})/dm = \mathbf{V}$.

با توجه به قضیه انتقال رینولدز برای مومنتوم داریم:

$$\sum \mathbf{F} = \frac{\partial}{\partial t}\left(\int_{CV} \mathbf{V}\rho\, d\mathcal{V}\right) + \sum (\dot{m}_i \mathbf{V}_i)_{\text{out}} - \sum (\dot{m}_i \mathbf{V}_i)_{\text{in}} \qquad (۱۰)$$

چنانچه حجم کنترل در ابعاد یک دیفرانسیل حجم باشد، در اینصورت:

$$\frac{\partial}{\partial t}(\mathbf{V}\rho\, d\mathcal{V}) \approx \frac{\partial}{\partial t}(\rho\mathbf{V})\, dx\, dy\, dz \qquad (۱۱)$$

مقدار مومنتوم ورودی به حجم کنترل در جهت x برابر $Mom_{x,in} = (\rho u\mathbf{V})dydz$ است. با توجه به رابطه بسط تیلور (۳)، مومنتوم خروجی نیز برابر $Mom_{x,out} = (\rho u\mathbf{V} + (\partial\rho u\mathbf{V}/\partial x)dx)dydz$ خواهد بود. بنابراین اختلاف مومنتوم ورودی و خروجی از حجم کنترل در جهت x برابر $(\partial\rho u\mathbf{V}/\partial x)dxdydz$ است. سایر مقادیر مومنتوم در جدول مقابل آمده است.

Velocity & Rocket Mass

Faces	Inlet momentum flx	Outlet momentum flx
x	$\rho u\mathbf{V}\ dy\ dz$	$\left[\rho u\mathbf{V} + \frac{\partial}{\partial x}(\rho u\mathbf{V})\, dx\right] dy\ dz$
y	$\rho v\mathbf{V}\ dx\ dz$	$\left[\rho v\mathbf{V} + \frac{\partial}{\partial y}(\rho v\mathbf{V})\, dy\right] dx\ dz$
z	$\rho w\mathbf{V}\ dx\ dy$	$\left[\rho w\mathbf{V} + \frac{\partial}{\partial z}(\rho w\mathbf{V})\, dz\right] dx\ dy$

ادامه اثبات معادله مومنتوم: لذا با قرار دادن رابطه (۱۱) و نیز اختلاف مومنتومهای خروجی و ورودی در رابطه (۱۰) داریم:

$$\sum \mathbf{F} = dx\, dy\, dz\left[\frac{\partial}{\partial t}(\rho \mathbf{V}) + \frac{\partial}{\partial x}(\rho u \mathbf{V}) + \frac{\partial}{\partial y}(\rho v \mathbf{V}) + \frac{\partial}{\partial z}(\rho w \mathbf{V})\right] \qquad (۱۲)$$

که در رابطه (۱۲)، عبارت سمت راست به شکل زیر نیز قابل بیان است:

$$\begin{aligned}&\frac{\partial}{\partial t}(\rho \mathbf{V}) + \frac{\partial}{\partial x}(\rho u \mathbf{V}) + \frac{\partial}{\partial y}(\rho v \mathbf{V}) + \frac{\partial}{\partial z}(\rho w \mathbf{V}) \\ &= \mathbf{V}\left[\frac{\partial \rho}{\partial t} + \boldsymbol{\nabla}\cdot(\rho \mathbf{V})\right] + \rho\left(\frac{\partial \mathbf{V}}{\partial t} + u\frac{\partial \mathbf{V}}{\partial x} + v\frac{\partial \mathbf{V}}{\partial y} + w\frac{\partial \mathbf{V}}{\partial z}\right)\end{aligned} \qquad (۱۳)$$

در رابطه (۱۳)، اولین عبارت سمت راست که داخل براکت قرار دارد، همان معادله پیوستگی (رابطه (۷)) بوده و برابر صفر است.

لذا برای دومین عبارت سمت راست این معادله داریم:

$$\frac{\partial \mathbf{V}}{\partial t} + u\frac{\partial \mathbf{V}}{\partial x} + v\frac{\partial \mathbf{V}}{\partial y} + w\frac{\partial \mathbf{V}}{\partial z} = \frac{\partial \mathbf{V}}{\partial t} + \mathbf{V}.\nabla\mathbf{V} = \frac{D\mathbf{V}}{Dt} = \frac{Du}{Dt}i + \frac{Dv}{Dt}j + \frac{Dw}{Dt}k \qquad (۱۴)$$

بنابراین معادله مومنتوم (رابطه (۱۰)) به شکل زیر قابل بیان است:

$$\sum \mathbf{F} = \rho\frac{D\mathbf{V}}{Dt}dxdydz \qquad (۱۵)$$

ادامه اثبات معادله مومنتوم: حال بایستی که مجموع نیروها در سمت چپ معادله (۱۵) محاسبه شوند. در مکانیک سیالات نیروها به دو دسته نیروهای حجمی و نیروهای سطحی تقسیم می شوند. نیروهای حجمی، نیروهایی هستند که به کل اجزا توده سیال اعمال می شوند، نظیر نیروی گرانش، نیروی مغناطیسی (در خصوص سیالات فرومغناطیس)، نیروی جاذبه و دافعه الکتریکی (در خصوص سیالات حاوی الکترولیت و ذرات باردار) و نظایر آن. در این درس فقط اثر نیروی گرانش مد نظر است و برای آن داریم:

$$d\mathbf{F}_{\text{grav}} = \rho\mathbf{g}\, dx\, dy\, dz \qquad (۱۶)$$

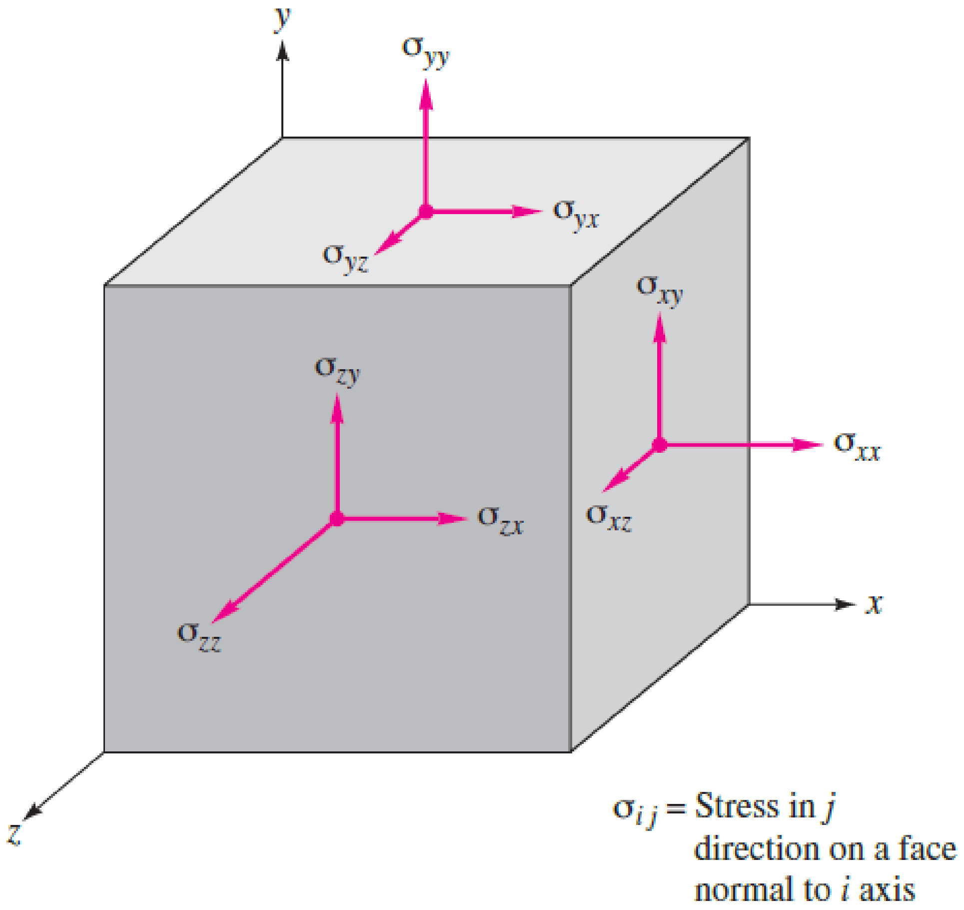
که در رابطه فوق، $\mathbf{g}$ بردار شتاب گرانش و $d\mathbf{F}_{grav}$ نیروی گرانش وارد بر حجم کنترل دیفرانسیلی است.

نیروهای سطحی، نیروهایی هستند که به سطوح حجم کنترل سیال وارد می شوند که شامل نیروهای ویسکوز و فشار هستند. می توان با توجه به قانون پاسکال، برآیندی برای تنش برشی ناشی از نیروی ویسکوز و فشار هیدرواستاتیکی به شکل زیر ارائه کرد:

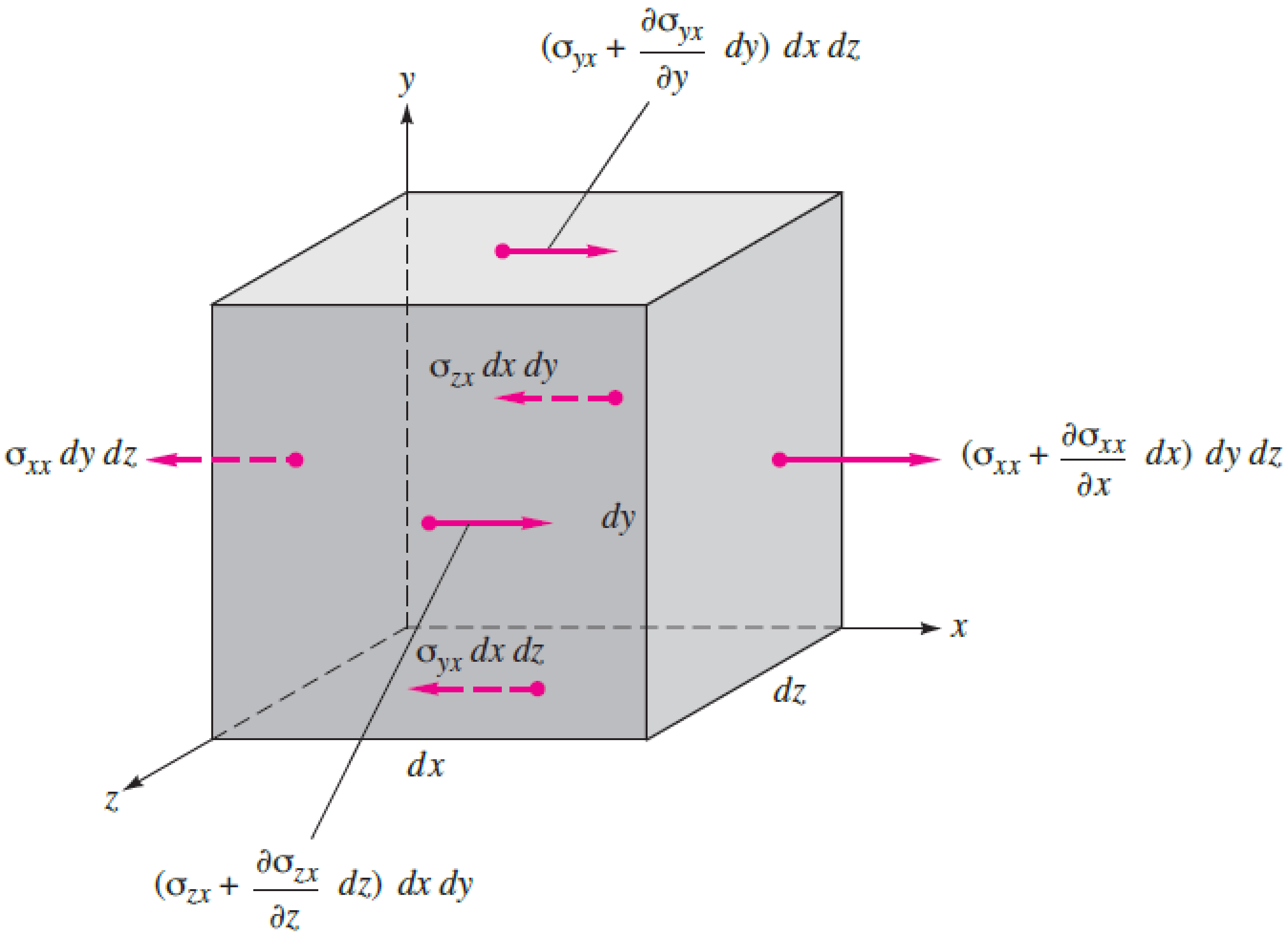
$$\boldsymbol{\sigma} = \boldsymbol{\tau} - p\mathbf{I} \qquad (۱۷)$$

در رابطه فوق، $\boldsymbol{\tau}$ میدان تنش برشی ویسکوز، p فشار، $\mathbf{I}$ ماتریس همانی و $\boldsymbol{\sigma}$ تنش کل است. در اسلاید ۱۲، شکل مولفه های تانسور تنش کل روی یک المان حجم کنترل نشان داده شده است. در نهایت رابطه (۱۷) به شکل زیر قابل بازکردن است:

$$\boldsymbol{\tau} = \begin{bmatrix} \tau_{xx} & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \tau_{yy} & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \tau_{zz} \end{bmatrix} \rightarrow \boldsymbol{\sigma} = \begin{bmatrix} -p+\tau_{xx} & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & -p+\tau_{yy} & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & -p+\tau_{zz} \end{bmatrix} \qquad (۱۸)$$



Notation for stresses.



Elemental cartesian fixed control volume showing the surface forces in the x direction only.

ادامه اثبات معادله مومنتوم: در تصویر سمت راست اسلاید ۱۲، مولفه هایی از تانسور تنش کل که سبب ایجاد نیرو در جهت x یک جریان می شوند، نشان داده شده است. در اینجا بایستی توجه داشت که به دلیل وجود جریان برشی و گرادیان فشار، مقدار تنش کل روی وجوه مقابل یکدیگر حجم کنترل تغییر کرده و تغییرات بر اساس بسط تیلور (رابطه (۳)) محاسبه شده اند. برآیند نیروهای سطحی در جهت x برابر است، با:

$$dF_{x,\text{surf}} = \left[\frac{\partial}{\partial x}(\sigma_{xx}) + \frac{\partial}{\partial y}(\sigma_{yx}) + \frac{\partial}{\partial z}(\sigma_{zx})\right] dx\, dy\, dz \tag{۱۹}$$

با قرار دادن مولفه های تنش مربوطه از رابطه (۱۸) در رابطه (۱۹) و تقسیم کردن طرفین به حجم المان $d\mathcal{V} = dx\ dy\ dz$ داریم:

$$\frac{dF_x}{d\mathcal{V}} = -\frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial x}(\tau_{xx}) + \frac{\partial}{\partial y}(\tau_{yx}) + \frac{\partial}{\partial z}(\tau_{zx}) \tag{۲۰}$$

به طور مشابه می توان دو مولفه دیگر نیروهای سطحی در جهتهای y و z را بدست آورد:

$$\begin{aligned}\frac{dF_y}{d\mathcal{V}} &= -\frac{\partial p}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial x}(\tau_{xy}) + \frac{\partial}{\partial y}(\tau_{yy}) + \frac{\partial}{\partial z}(\tau_{zy}) \\ \frac{dF_z}{d\mathcal{V}} &= -\frac{\partial p}{\partial z} + \frac{\partial}{\partial x}(\tau_{xz}) + \frac{\partial}{\partial y}(\tau_{yz}) + \frac{\partial}{\partial z}(\tau_{zz})\end{aligned} \tag{۲۱}$$

روابط (۲۰) و (۲۱) را می توان به شکل زیر نیز بیان کرد:

$$d\mathbf{F}_{surf} = \left(-\nabla p + \nabla.\boldsymbol{\tau}\right) dx dy dz \tag{۲۲}$$

ادامه اثبات معادله مومنتوم:

در رابطه (۲۲)، ترم دیورژانس تنش به شکل زیر تعریف می شود:

$$\nabla.\boldsymbol{\tau} = \mathbf{i}\left(\frac{\partial \tau_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z}\right) + \mathbf{j}\left(\frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zy}}{\partial z}\right) + \mathbf{k}\left(\frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zz}}{\partial z}\right) \qquad (۲۳)$$

بنابراین از روابط (۱۶) و (۲۲)، برآیند نیروهای حجمی و سطحی برابر است با:

$$d\mathbf{F} = d\mathbf{F}_{body} + d\mathbf{F}_{surf} = d\mathbf{F}_{grav} + d\mathbf{F}_{surf} = (\rho\mathbf{g} - \nabla p + \nabla.\boldsymbol{\tau})\,dxdydz \qquad (۲۴)$$

لذا با قرار دادن رابطه (۲۴) در معادله (۱۵) و تقسیم کردن طرفین به $dxdydz$ داریم:

$$(\rho\mathbf{g} - \nabla p + \nabla.\boldsymbol{\tau}) = \rho\frac{D\mathbf{V}}{Dt} \qquad (۲۵)$$

رابطه فوق، معادله مومنتوم برای هر نوع سیال نیوتنی و غیرنیوتنی است و به شکل مقابل نیز قابل بیان است:

$$\begin{aligned}
\rho g_x - \frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z} &= \rho\left(\frac{\partial u}{\partial t} + u\frac{\partial u}{\partial x} + v\frac{\partial u}{\partial y} + w\frac{\partial u}{\partial z}\right) \\
\rho g_y - \frac{\partial p}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zy}}{\partial z} &= \rho\left(\frac{\partial v}{\partial t} + u\frac{\partial v}{\partial x} + v\frac{\partial v}{\partial y} + w\frac{\partial v}{\partial z}\right) \\
\rho g_z - \frac{\partial p}{\partial z} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zz}}{\partial z} &= \rho\left(\frac{\partial w}{\partial t} + u\frac{\partial w}{\partial x} + v\frac{\partial w}{\partial y} + w\frac{\partial w}{\partial z}\right)
\end{aligned} \qquad (۲۶)$$

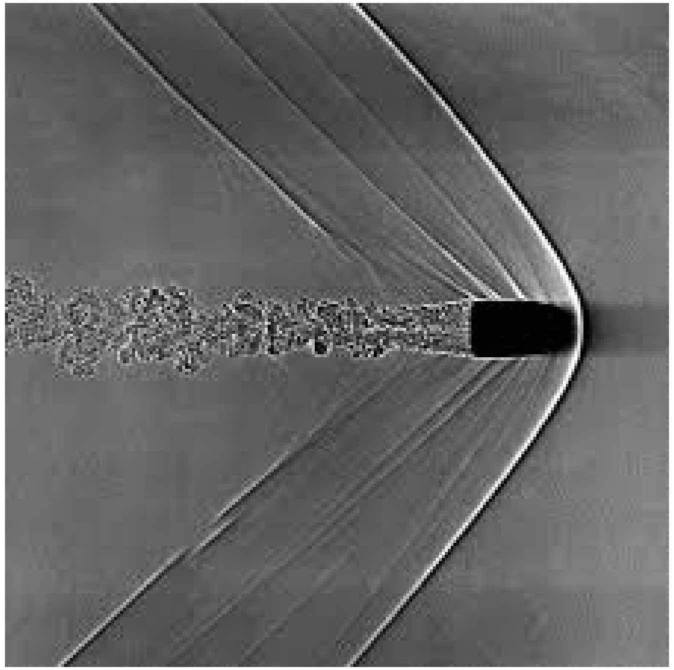
ادامه اثبات معادله مومنتوم:

برای سیال نیوتنی، تانسور تنش از رابطه زیر قابل محاسبه است:

$$\boldsymbol{\tau} = \mu\dot{\boldsymbol{\gamma}} + \lambda\left(\nabla.\mathbf{V}\right)\mathbf{I} \qquad (۲۷)$$

در رابطه فوق، μ ویسکوزیته سیال نیوتنی است. همچنین λ ویسکوزیته بالک (Bulk Viscosity) سیال بوده که مقدار آن در جریانهای تراکم پذیر دارای اهمیت می باشد و معرف تنش لازم برای متراکم کردن حجم سیال است. همچنین جمله $\dot{\boldsymbol{\gamma}}$ تانسور نرخ برش جریان است:

$$\dot{\boldsymbol{\gamma}} = \nabla\mathbf{V} + \nabla\mathbf{V}^T = \begin{bmatrix} 2\dfrac{\partial u}{\partial x} & \dfrac{\partial u}{\partial y}+\dfrac{\partial v}{\partial x} & \dfrac{\partial u}{\partial z}+\dfrac{\partial w}{\partial x} \\ \dfrac{\partial u}{\partial y}+\dfrac{\partial v}{\partial x} & 2\dfrac{\partial v}{\partial y} & \dfrac{\partial v}{\partial z}+\dfrac{\partial w}{\partial y} \\ \dfrac{\partial u}{\partial z}+\dfrac{\partial w}{\partial x} & \dfrac{\partial v}{\partial z}+\dfrac{\partial w}{\partial y} & 2\dfrac{\partial w}{\partial z} \end{bmatrix} \qquad (۲۸)$$



ادامه اثبات معادله مومنتوم (استخراج روابط نهایی برای جریان تراکم پذیر نیوتنی):

با قرار دادن رابطه (۲۸) در رابطه (۲۷) و در نهایت قرار دادن حاصل آن در معادله (۲۶) برای **جریان نیوتنی تراکم پذیر** داریم:

$$\begin{aligned}
\rho\frac{Du}{Dt} &= \rho g_x - \frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial x}\left(2\mu\frac{\partial u}{\partial x} + \lambda\ \nabla.\mathbf{V}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left[\mu\left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}\right)\right] \\
&\quad + \frac{\partial}{\partial z}\left[\mu\left(\frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z}\right)\right] \\
\rho\frac{Dv}{Dt} &= \rho g_y - \frac{\partial p}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial x}\left[\mu\left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y}\right)\right] + \frac{\partial}{\partial y}\left(2\mu\frac{\partial v}{\partial y} + \lambda\ \nabla.\mathbf{V}\right) \\
&\quad + \frac{\partial}{\partial z}\left[\mu\left(\frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y}\right)\right] \\
\rho\frac{Dw}{Dt} &= \rho g_z - \frac{\partial p}{\partial z} + \frac{\partial}{\partial x}\left[\mu\left(\frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z}\right)\right] + \frac{\partial}{\partial y}\left[\mu\left(\frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y}\right)\right] \\
&\quad + \frac{\partial}{\partial z}\left(2\mu\frac{\partial w}{\partial z} + \lambda\ \nabla.\mathbf{V}\right)
\end{aligned} \qquad (۲۹)$$

که شکل تانسوری رابطه (۲۹) بصورت زیر قابل بیان است:

$$\rho\frac{D\mathbf{V}}{Dt} = \left\{\rho\mathbf{g} - \nabla p + \nabla.\left[\mu\left(\nabla\mathbf{V} + \nabla\mathbf{V}^T\right) + \lambda\left(\nabla.\mathbf{V}\right)\mathbf{I}\right]\right\} \qquad (۳۰)$$

ادامه اثبات معادله مومنتوم: معادله مومنتوم برای جریان تراکم ناپذیر نیوتنی

همانطور که پیشتر گفته شد، به ازای $Ma<0.3$ جریان تراکم ناپذیر بوده و مطابق رابطه پیوستگی (رابطه (۸))، دیورژانس سرعت جریان تراکم ناپذیر برابر صفر است $(\nabla.\mathbf{V}=0)$. از رابطه (۳۰)، مقدار وسکوزیته بالک در معادله مومنتوم جریان تراکم ناپذیر بی اهمیت است چون این ترم در دیورژانس سرعت ضرب شده و حاصل آن عملا صفر است. در خصوص دیگر ترم دیورژانس تنش ویسکوز (یعنی $\nabla.\left[\mu(\nabla\mathbf{V}+\nabla\mathbf{V}^T)\right]$) رابطه (۳۰) می توان نوشت:

$$\nabla.\left[\mu(\nabla\mathbf{V}+\nabla\mathbf{V}^T)\right]=\mu\nabla.\dot{\gamma}=\mu\left((\nabla^2u)i+(\nabla^2v)j+(\nabla^2w)k\right)=\mu\left(\frac{\partial^2\mathbf{V}}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\mathbf{V}}{\partial y^2}+\frac{\partial^2\mathbf{V}}{\partial z^2}\right)=\mu\nabla^2\mathbf{V} \qquad (۳۱)$$

اثبات رابطه (۳۱) به سادگی امکان پذیر است. شایان ذکر است که دیورژانس یک تانسور، از رابطه ای نظیر رابطه (۲۳) قابل محاسبه است. برای نمونه برای مولفه x رابطه (۳۱)، داریم:

$$\nabla.\left[(\nabla\mathbf{V}+\nabla\mathbf{V}^T)\right]\Big|_x=\nabla.\dot{\gamma}\Big|_x=\frac{\partial\dot{\gamma}_{xx}}{\partial x}+\frac{\partial\dot{\gamma}_{yx}}{\partial y}+\frac{\partial\dot{\gamma}_{zx}}{\partial z} \qquad (۳۲)$$

با قرار دادن ترمهای لازم از رابطه (۲۸) در رابطه (۳۲)، داریم:

$$\nabla.\left[(\nabla\mathbf{V}+\nabla\mathbf{V}^T)\right]\Big|_x=\frac{\partial}{\partial x}\left(2\frac{\partial u}{\partial x}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial v}{\partial x}\right)+\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial u}{\partial z}+\frac{\partial w}{\partial x}\right)=$$

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)+\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)+\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)+\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)= \qquad (۳۳)$$

$$\frac{\partial^2u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2u}{\partial y^2}+\frac{\partial^2u}{\partial z^2}+\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{\partial w}{\partial z}\right)=\nabla^2u+\frac{\partial}{\partial x}(\nabla.\mathbf{V})=\nabla^2u$$

به طریق مشابه مولفه های y و z رابطه (۳۱)، برحسب لاپلاسین v و w قابل بیان هستند.

ادامه اثبات معادله مومنتوم(استخراج روابط نهایی برای جریان تراکم ناپذیر نیوتنی):

در نهایت با قرار دادن روابط (۸) و (۳۱) در معادله (۳۰)، معادله مومنتوم جریان ناپذیر نیوتنی استخراج می شود:

$$\rho \frac{D\mathbf{V}}{Dt} = \rho \mathbf{g} - \nabla p + \mu \nabla^2 \mathbf{V} \qquad (۳۴)$$

شایان ذکر است که مجموعه معادلات پیوستگی و مومنتوم به **معادلات ناویر-استوکس** معروف هستند. لذا از روابط (۸) و (۳۴)، فرم باز **معادلات ناویر-استوکس جریان تراکم ناپذیر نیوتنی** به شکل زیر خواهد بود:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial x} + \dfrac{\partial v}{\partial y} + \dfrac{\partial w}{\partial z} = 0 \\ \rho\left(\dfrac{\partial u}{\partial t} + u\dfrac{\partial u}{\partial x} + v\dfrac{\partial u}{\partial y} + v\dfrac{\partial u}{\partial z}\right) = \rho g_x - \dfrac{\partial p}{\partial x} + \mu\left(\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial z^2}\right) \\ \rho\left(\dfrac{\partial v}{\partial t} + u\dfrac{\partial v}{\partial x} + v\dfrac{\partial v}{\partial y} + v\dfrac{\partial v}{\partial z}\right) = \rho g_y - \dfrac{\partial p}{\partial y} + \mu\left(\dfrac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 v}{\partial y^2} + \dfrac{\partial^2 v}{\partial z^2}\right) \\ \rho\left(\dfrac{\partial w}{\partial t} + u\dfrac{\partial w}{\partial x} + v\dfrac{\partial w}{\partial y} + v\dfrac{\partial w}{\partial z}\right) = \rho g_z - \dfrac{\partial p}{\partial z} + \mu\left(\dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \dfrac{\partial^2 w}{\partial z^2}\right) \end{cases} \qquad (۳۵)$$

معادلات فوق مشتمل بر ۴ معادله و ۴ مجهول u، v، w و p است. به طور کلی در شرایطی که جریان ایزوترمال یا خواص مستقل از دما باشند، حل معادلات فوق (با در نظر گرفتن شرایط اولیه و مرزی مناسب) برای تعیین میدان سرعت و فشار یک جریان تراکم ناپذیر کفایت می کند.

فرم بقایی معادلات مومنتوم جریان تراکم ناپذیر

عبارت مشتق مادی سرعت در سمت چپ معادلات ناویر استوکس بصورت فرم بقایی قابل بازنویسی است:

$$\frac{D\mathbf{V}}{Dt}=\frac{\partial \mathbf{V}}{\partial t}+\nabla.\left(\mathbf{V}\mathbf{V}^{T}\right) \qquad (۳۶)$$

در رابطه (۳۶)، ترم $\nabla.\left(\mathbf{V}\mathbf{V}^{T}\right)$ به شکل زیر قابل بیان است:

$$\mathbf{V}\mathbf{V}^{T}=\begin{bmatrix} u \\ v \\ w \end{bmatrix}\begin{bmatrix} u & v & w \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} u^2 & uv & uw \\ vu & v^2 & vw \\ wu & wv & w^2 \end{bmatrix} \qquad (۳۷)$$

اثبات رابطه (۳۶) بسادگی امکان پذیر است. برای نمونه برای مولفه x این رابطه داریم:

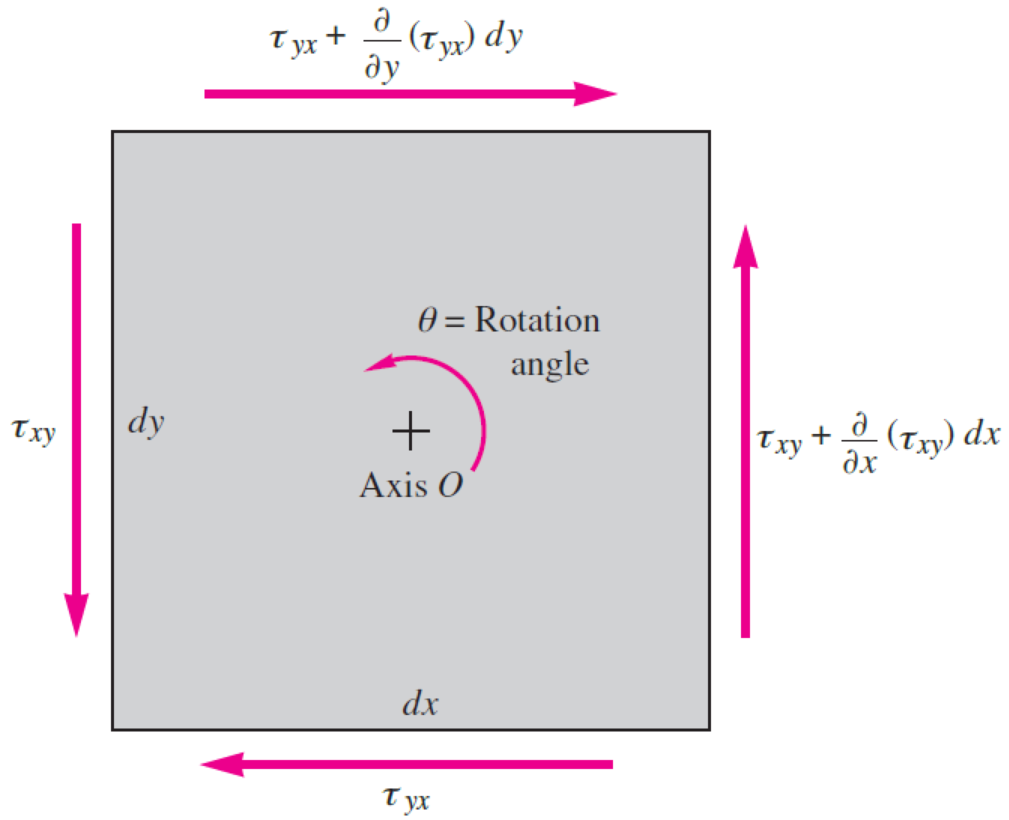
$$\begin{aligned}
&\frac{\partial u}{\partial t}+\nabla.\left(\mathbf{V}\mathbf{V}^{T}\right)_x=\frac{\partial u}{\partial t}+\frac{\partial u^2}{\partial x}+\frac{\partial uv}{\partial y}+\frac{\partial uw}{\partial z}= \\
&\frac{\partial u}{\partial t}+2u\frac{\partial u}{\partial x}+u\frac{\partial v}{\partial y}+v\frac{\partial u}{\partial y}+u\frac{\partial w}{\partial z}+w\frac{\partial u}{\partial z}= \qquad (۳۸) \\
&\frac{\partial u}{\partial t}+u\frac{\partial u}{\partial x}+v\frac{\partial u}{\partial y}+w\frac{\partial u}{\partial z}+u\left(\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{\partial w}{\partial z}\right)=\frac{Du}{Dt}
\end{aligned}$$

فرم بقایی معادلات ناویر–استوکس جریان تراکم ناپذیر

با توجه به معادلات (۳۶) و (۳۷)، صورت بقایی معادلات ناویر-استوکس جریان تراکم ناپذیر به شکل زیر قابل بیان است:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial x}+\dfrac{\partial v}{\partial y}+\dfrac{\partial w}{\partial z}=0 \\ \rho\left(\dfrac{\partial u}{\partial t}+\dfrac{\partial u^2}{\partial x}+\dfrac{\partial uv}{\partial y}+\dfrac{\partial uw}{\partial z}\right)=\rho g_x-\dfrac{\partial p}{\partial x}+\mu\left(\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\dfrac{\partial^2 u}{\partial z^2}\right) \\ \rho\left(\dfrac{\partial v}{\partial t}+\dfrac{\partial uv}{\partial x}+\dfrac{\partial v^2}{\partial y}+\dfrac{\partial vw}{\partial z}\right)=\rho g_y-\dfrac{\partial p}{\partial y}+\mu\left(\dfrac{\partial^2 v}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2 v}{\partial y^2}+\dfrac{\partial^2 v}{\partial z^2}\right) \\ \rho\left(\dfrac{\partial w}{\partial t}+\dfrac{\partial uw}{\partial x}+\dfrac{\partial vw}{\partial y}+\dfrac{\partial w^2}{\partial z}\right)=\rho g_z-\dfrac{\partial p}{\partial z}+\mu\left(\dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2 w}{\partial y^2}+\dfrac{\partial^2 w}{\partial z^2}\right) \end{cases} \qquad (۳۹)$$

استفاده از فرم بقایی جهت حل عددی معادلات ناویر-استوکس می تواند مفید باشد، زیرا در این فرم به دلیل وجود ترم پیوستگی در معادلات مومنتوم، Stiffness معادلات تا حدی کاهش پیدا می کند. همچنین استفاده از این شکل می تواند به تعریف عبارت جدیدی به نام تنش رینولدز منجر شود (از معادله (۳۷))، که در تحلیل و مدلسازی جریانهای آشفته بسیار مفید است.



قانون بقای مومنتوم زاویه ای

در شکل مقابل یک المان دیفرانسیلی از سیال نشان داده شده است. از قانون بقای مومنتوم زاویه ای داریم:

$$\sum M_o = I\alpha$$

با محاسبه گشتاورها حول نقطه O المان نشان داده شده، نتیجه می شود:

$$\left[\tau_{xy} - \tau_{yx} + \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial x}(\tau_{xy})\, dx - \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial y}(\tau_{yx})\, dy\right] dx\, dy\, dz$$

$$= \frac{1}{12}\rho(dx\, dy\, dz)(dx^2 + dy^2)\frac{d^2\theta}{dt^2}$$

چنانچه طرفین معادله فوق به حجم المان ($dxdydz$) تقسیم شوند، بزرگترین عبارات سمت چپ ترم $\tau_{xy} - \tau_{yx}$ خواهد بود که فاقد هرگونه عبارت دیفرانسیلی است. سایر عبارات باقیمانده دارای دیفرانسیلهای مرتبه اول یا دوم هستند (برای مثال عبارت سمت راست از مرتبه دیفرانسیل به توان ۲ بوده ($dx^2 + dy^2$) و بسیار کوچک است). با آنالیز مرتبه بزرگی معادله فوق و صرفنظر از جملات دارای دیفرانسیل مرتبه اول و دوم در مقابل ترم فاقد دیفرانسیل (یعنی $\tau_{xy} - \tau_{yx}$) داریم: $\tau_{xy} = \tau_{yx}$

با تعمیم نتیجه به سایر تنشها نتیجه می شود که جهت ارضای قانون بقای مومنتوم زاویه ای باید تانسور تنش متقارن باشد:

$$\tau_{xy} = \tau_{yx}, \quad \tau_{xz} = \tau_{zx}, \quad \tau_{yz} = \tau_{zy} \quad \rightarrow \quad \boldsymbol{\tau} = \boldsymbol{\tau}^{\mathbf{T}}$$

فشار ترمودینامیکی و فشار مکانیکی

Sir George Stokes
1819 –1903

با توجه به روابط (۱۷) و (۲۷) برای تنش کل وارد بر سیال داریم:

$$\boldsymbol{\sigma} = -p\mathbf{I} + \mu\dot{\boldsymbol{\gamma}} + \lambda\left(\nabla.\mathbf{V}\right)\mathbf{I} \qquad (۴۰)$$

فشار مکانیکی ($\overline{p}$) بصورت متوسط تنشهای نرمال کل تعریف می شود:

$$\overline{p} = -\frac{\sigma_{xx} + \sigma_{yy} + \sigma_{zz}}{3} \qquad (۴۱)$$

با توجه به رابطه (۴۰)، برای تنش های نرمال کل داریم:

$$\sigma_{xx} = -p + 2\mu\frac{\partial u}{\partial x} + \lambda\nabla.\mathbf{V}$$

$$\sigma_{yy} = -p + 2\mu\frac{\partial v}{\partial y} + \lambda\nabla.\mathbf{V} \qquad (۴۲)$$

$$\sigma_{zz} = -p + 2\mu\frac{\partial w}{\partial z} + \lambda\nabla.\mathbf{V}$$

با قرار دادن معادله (۴۲)، در معادله (۴۱)، داریم:

$$\overline{p} = p - \frac{2}{3}\mu\left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z}\right) - \lambda\nabla.\mathbf{V} \qquad (۴۳)$$

فشار ترمودینامیکی و فشار مکانیکی

در نهایت رابطه (۴۳)، به شکل زیر قابل بازنویسی است:

$$\overline{p} = p - \left(\frac{2}{3}\mu + \lambda\right)\nabla.\mathbf{V} \qquad (۴۴)$$

با توجه به رابطه فوق، در جریانهای تراکم ناپذیر ($\nabla.\mathbf{V} = 0$) فشار ترمودینامیکی با فشار مکانیکی با یکدیگر برابرند ($\overline{p} = p$). اما در خصوص جریانهای تراکم پذیر اینچنین نیست و مشکل عدم تساوی فشار ترمودینامیکی با فشار مکانیکی، بیش از یک قرن موضوعی بحث برانگیز در مکانیک سیالات بوده است. در سال ۱۸۴۵، استوکس راه حلی برای این مشکل ارائه نمود که به فرضیه استوکس معروف است (Stokes' hypothesis). او فرض کرد که اگر ترم $\frac{2}{3}\mu + \lambda$ برابر صفر باشد، بنابراین مشکل حل خواهد شد و فشار ترمودینامیکی با فشار مکانیکی حتی در جریانهای تراکم پذیر برابر خواهد بود ($\overline{p} = p$). بنابراین با اعمال فرضیه استوکس، میدان تنش کل از رابطه زیر قابل محاسبه است:

$$\boldsymbol{\sigma} = -p\mathbf{I} + \mu\dot{\boldsymbol{\gamma}} - \frac{2}{3}\mu\left(\nabla.\mathbf{V}\right)\mathbf{I} \qquad (۴۵)$$

در قرن بیستم مشاهدات آزمایشگاهی نشان داد که مقدار ویسکوزیته بالک (که به ویسکوزیته دوم نیز معروف است) چندان از رابطه $\lambda = -\frac{2}{3}\mu$ و حتی در بعضی سیالات مقداری مثبت است. با این وجود به دلیل مقدار اثر بسیار کم آن در میدان تنش، هنوز استفاده از رابطه (۴۵) برای تخمین میدان تنش کل (بویژه در نرم افزارهای تجاری) رایج است!


FINISH